الصفحة
1 / 5

الامتحان التجريبي الثالث لنيل شهادة
البكالوريا مدينة زايو 2017

المادة	الرياضيات	المعامل	9
الشعبة	شعبة العلوم الرياضيات (أ) و(ب)	مدة الإنجاز	4

بسم الله الرحمن الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات .
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح .

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات..(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية...............................(4.00 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..............................(3.00 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل...(10.00 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذ : سفيان طجيو

التمرين الأول: "3 points"

لكل n من $\mathbb{N}$، نضع : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$.

0.25 ن 1) ناقش حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7.

0.25 ن 2) -a تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 \times S_n = 5^{n+1} - 1$.

0.50 ن -b ليكن a من $\mathbb{N}$، بين أن : $4 \times S_n \equiv a[7] \Leftrightarrow S_n \equiv 2a[7]$.

0.25 ن -c حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد S_{2017} على 7.

3) ليكن $n \in \mathbb{N}$.

و نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلتين : $(E_0) : 5^n x - S_n y = 0$ و $(E) : 5^n x - S_n y = 7$.

0.25 ن -a بين أن المعادلتين (E) و (E_0) تقبل حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

0.50 ن -b حل المعادلة (E_0) في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

0.50 ن -c بين أن : $(E) : 5^n x - S_n y = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 + S_n k \\ y = 28 + 5^n k \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$.

0.50 ن 4) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$

التمرين الثاني : "4 points"

ليكن ψ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو $\mathbb{R}$.

الجزء الأول: نزود $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\star$ المعرف بما يلي :

$$\forall (a,b) \in G, \forall (c,d) \in G : (a,b) \star (c,d) = (ac, bc + \psi(a)d)$$

0.50 ن 1) بين أن القانون $\star$ تجميعي إذا وفقط إذا كان $\forall a, c \in \mathbb{R}^*, \psi(ac) = \psi(a)\psi(c)$.

0.75 ن 2) -a بين أنه إذا كان $\psi(1) = 1$ فإن القانون $\star$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.50 ن -b عكسيا إذا كان القانون $\star$ يقبل عنصرا محايدا، هل $\psi(1) = 1$ ؟

1.00 ن 3) نفترض أن التطبيق ψ يحقق بما يلي : $\begin{cases} \forall a, c \in \mathbb{R}^*, \psi(ac) = \psi(a)\psi(c) \\ \psi(1) = 1 \end{cases}$

✓ بين أن لكل عنصر (a,b) من G يقبل عنصر مماثل بالنسبة للقانون $\star$ الذي يتم تحديده. هل $(G,\star)$ زمرة ؟

الجزء الثاني : ليكن $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} \psi(x) & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (x,y) \in G \right\}$.

وليكن ψ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall a, c \in \mathbb{R}^*, \psi(ac) = \psi(a)\psi(c)$.

0.25 ن (1 بين أن : $\forall (x,y),(x',y') \in G; M(x,y) \times M(x',y') = M((x,y) * (x',y'))$

0.25 ن (2 بين أن $(F,\times)$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(3 نعتبر التطبيق:
$$\begin{aligned} \phi \ : \ G &\to F \\ (x,y) &\to \mathcal{M}(x,y) \end{aligned}$$

0.50 ن a- بين أن التطبيق ϕ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(F,\times)$، ثم استنتج بنية $(F,\times)$.

0.25 ن b- حدد المصفوفة المقلوبة للمصفوفة $\mathcal{M}(x,y)$.

التمرين الثالث: "3 points"

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E) : z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$.

وليكن m عددا عقديا غير منعدم وعمدته θ بحيث : $\theta \in]0,\pi[$.

وليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$.

0.50 ن (1 a- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

0.50 ن b-بين أنه : $0 < z_1 z_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{8}$.

✓ فيما يلي من التمرين، نفترض : $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

0.50 ن (2 بين أن : $z_1 z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.

(3 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و t.

ليكن t ينتمي إلى المجال $]2,3[$ و لتكن النقطة E نقطة تقاطع نصف دائرة C التي قطرها $[BC]$ مع محور $(O,\vec{v})$ بحيث : $Im(z_E) > 0$.

0.75 ن a- بين أن : $OE^2 = OB \times OC$ ثم إستنتج أن : $|m| = OE$.

0.25 ن b- أنشيء النقطة $A(m)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (مبرزا طريقة الإنشاء)

0.50 ن c- إستنتج طريقة للإنشاء النقطتين z_1 و z_2.

التمرين الرابع: "10 points"

0.25 ن I- 1) a- بين أن الدالة $t \mapsto \frac{1}{ln(t)}$ تناقصية على $I =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

0.75 ن b- إستنتج أن : $\frac{x^2-x}{ln(x)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{ln(t)} \leq \frac{x^2-x}{2\,ln(x)}$: $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[)$.

2) نعتبر الدالة ψ المعرفة بما يلي : $\begin{cases}\psi(t)=\dfrac{t-1}{\ln t} & ; t\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ \psi(0)=0\ ;\ \psi(1)=1\end{cases}$

0.25 ن — a- بين أن : $(\forall t\in]0;1[\cup]1;+\infty[);\ t-1-t\ln(t)<0$.

0.25 ن — b- بين أن الدالة ψ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

0.50 ن — c- إستنتج أن : $(\forall x\in I);\ x-1\le \int_x^{x^2}\dfrac{\psi(t)}{t}dt\le \dfrac{x^2-1}{2}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases}f(x)=-\ln(x+1)+\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln(t)}; & x\in I\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}$

0.75 ن — 1) a- بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

0.50 ن — b- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

0.50 ن — 2) a- تحقق من أن : $(\forall x\in I);\ \int_x^{x^2}\dfrac{\psi(t)}{t}dt=f(x)+\ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

0.50 ن — b- بين أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في 1.

0.25 ن — 3) a- بين أن : $(\exists\alpha\in]0,1[):\ f'(\alpha)=0$.

0.50 ن — b- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن : $(\forall x\in I); f'(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\psi(x)$.

0.50 ن — c- إستنتج أن f' تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ ثم حدد تغيرات الدالة f.

III- نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $\begin{cases}g(x)=(x+1)\exp\left(-\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln(t)}\right); & x\in I\\ g(0)=g(1)=1\end{cases}$

0.25 ن — 1) a- تحقق أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+); g(x)=e^{-f(x)}$.

0.75 ن — b- ضع جدول التغيرات الدالة g.

0.50 ن — c- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (نأخذ : $\alpha\approx 0,3$ و $g(\alpha)\approx 1,2$ و نقبل أن $(\mathcal{C}_g)$ يقبل نقطة إنعطاف أفصولها x_0 بحيث $\left(\dfrac{3}{2}<x_0<2\right)$).

1.00 ن — 2) a- أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة : $g(x)=\dfrac{n}{(n+1)}\dfrac{g(\alpha)}{\alpha}x$ تقبل حلا وحيدا

1.00 ن — b- أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $x_n\le\dfrac{n+1}{n}\alpha$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(x_n)_{n\ge1}$

إعداد الأستاذ : سفيان طجيو

الامتحان التجريبي للبكالوريا -2017- الموضوع - مادة: الرياضيات -
شعبة العلوم الرياضيات (أ) و (ب)

IV - نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Log((n+k)^{2017n}) - Log(n^{2017n})}{2017n^2}$$

1.00 ن ✓ بين أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance

الأستاذ سفيان طجيو يتمنى حظا موفقا لجميع تلاميذ المغرب في امتحانات الباكالوريا المقبلة وبالخصوص تلاميذ ثانوية حسان بن ثابت

إعداد الأستاذ : سفيان طجيو